INSTITUCIÓN EDUCATIVA INEM "JORGE ISAACS"

"UNIDOS EN EL AMOR FORMAMOS LA MEJOR INSTITUCIÓN"

Departamento de: Matemáticas.
Material: "QUEDATE EN CASA"
Conceptos Previos: Operaciones Básicas
DESARROLLANDO COMPETENCIAS
GUÍA 1 (5 semanas): Relaciones y funciones

Área: Matemáticas
Asignatura: Cálculo.
Grado: 11°
Periodo: II (10 de Mayo – 27 de Agosto)

Tiempo estimado para el desarrollo de la guía 1 por parte de los estudiantes: 5 semanas (21 Junio a 23 de Julio)

Estudiante: ________________________________Código:___________Grado: 11°-___ Fecha: __________________

Recuerda tus medidas de protección contra el COVID 19. Mantén tus manos limpias. En caso de tener síntomas llama por teléfono a tu servicio de salud para que te el médico te indique que debes hacer, en caso que los síntomas sean tos seca, garganta afectada, fuerte dolor de cabeza y debilidad. La higiene bucal con bicarbonato de soda o sal es el primer paso a combatirlo.

Docente(s):	**correo electrónico (envió de trabajos y demás):**
Guillermo Arias Parra	d.ine.guillermo.arias@cali.edu.co
Fernando Bastidas Parra	d.ine.fernando.bastidas@cali.edu.co
Juan José Jaramillo Arcila	d.ine.juan.jaramillo@cali.edu.co
Juan Carlos Llanten Montenegro	d.ine.juan.llanten@cali.edu.co
Javier Hernando Ochoa Arteaga	d.ine.javier.ochoa@cali.edu.co
Justo Javier Ortiz Camacho	d.ine.justo.ortiz@cali.edu.co
Jose Nolberto Patiño	d.ine.jose.patino@cali.edu.co
David Adrián Salgado Arias	d.ine.david.salgado@cali.edu.co

CRITERIOS PARA LA VALORACIÓN DE L@S GUÍAS, TALLERES, CONSULTAS, ENTRE OTRAS:

1. Desarrollar la guía 3 de manera individual (pueden utilizar herramientas tecnológicas para trabajar en grupos, pero cada uno envía fotos de su trabajo en su respectivo cuaderno o blog).
2. La guía 3 se debe desarrollar con su debida justificación en el cuaderno, después se deben enviar las fotos del desarrollo del cuaderno de manera organizada en un solo documento (archivo) PDF (el cual se debe llamar con el nombre completo del estudiante, grado y asignatura) al correo electrónico correspondiente al docente asignado.
3. No se permiten fotocopias
4. Para enviar trabajos lo deben hacer utilizando el correo que fue creado por la alcaldía, de lo contrario no será tenido en cuenta, cualquier anomalía comunicar al director de grupo y al profesor para dar una solución.
5. Debe quedar evidencia de todo el trabajo desarrollado en el cuaderno y en el correo electrónico en el cual se envió el mismo, por si se presenta alguna anomalía.
6. Presentar en la fecha estipulada por la institución o el profesor encargado.

Estándares:

- Reconoce una función polinómica, tabula, gráfica y comprende lo que representa.
- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Nivel(es) de desempeño(s):
Desempeño:
Básico:

- Representa variaciones infinitesimales en tablas y gráficos para estimar la tendencia de una función en un punto dado.

Alto:

- Justifica procedimientos y estrategias para calcular límites de funciones algebraicas y trascendentes en un punto dado.

Superior:

- Justifica la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de problemas de variaciones infinitesimales en diversos contextos.

Derechos básicos de aprendizaje:

- Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

Competencia ciudadana:

- Identifico y supero emociones, como el resentimiento y el odio, para poder perdonar y reconciliarme con quienes he tenido conflictos.

<u>Recuerda que lo importante es la justificación y la redacción del mismo</u>

RELACIONES Y FUNCIONES

Entender los conceptos de **Relación** y de **Función** es de suma importancia en Matemática. Para lograr esa comprensión es necesario adentrarnos en la noción de **Correspondencia**, ya que esta tiene un papel fundamental en las relaciones y funciones.

Lo primero es entender que **Correspondencia es equivalente a Relación**. En nuestra lengua, decir “en relación a”, es equivalente a decir “corresponde a”.

Ejemplos:

En una tienda comercial, cada artículo **está relacionado** con su precio; o sea, a cada artículo **le corresponde** un precio.

En la guía telefónica, cada cliente **está relacionado** con un número; o sea, a cada nombre de la guía **le corresponde** un número.

Definición matemática de Relación y de Función

En matemática, **Relación** es la correspondencia de un primer conjunto, llamado **Dominio**, con un segundo conjunto, llamado **Recorrido o Rango**, de manera que a cada elemento del Dominio le corresponde uno o más elementos del Recorrido o Rango.

Por su parte, una **Función** es una relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde **uno y sólo un valor** del Recorrido. De las definiciones anteriores podemos deducir que todas las **funciones** son **relaciones**, pero **no todas** las **relaciones** son **funciones.**

También debemos agregar que toda ecuación es una **Relación**, pero no toda ecuación es una **Función.** Todas las **Relaciones** pueden ser graficadas en el Plano Cartesiano.

Dados dos conjuntos A y B una relación definida de A en B es un conjunto de parejas ordenadas (**par ordenado**) que hacen verdadera una proposición; dicho de otro modo, una relación es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B

Ejemplo 1.

Si A = {2, 3} y B = {1, 4, 5}, encontrar tres relaciones definidas de A en B.

Solución

El producto cartesiano de A x B está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados:

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 4), (3, 5)\}$$

Y cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

$$R1 = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

$$R2 = \{(2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$R3 = \{(2, 4), (3, 5)\}$$

La relación R1 se puede definir como el conjunto de pares cuyo segundo elemento es 1, esto es, $R1 = \{(x, y) / y = 1\}$.

La relación R2 está formada por los pares cuyo primer componente es menor que el segundo componente, $R2 = \{(x, y) / x < y\}$

Y la relación R3 está conformada por todos los pares que cumplen con que el segundo componente es dos unidades mayor que el primer componente, dicho de otro modo, $R3 = \{(x, y) / y = x + 2\}$

Así, se puede continuar enumerando relaciones definidas a partir de A x B. Como se puede ver, la regla que define la relación se puede escribir mediante **ecuaciones** o **desigualdades** que relacionan los valores de ***x*** e ***y***. Estas reglas son un medio conveniente para ordenar en pares los elementos de los dos conjuntos.

Ejemplo 2.

Dados los conjuntos $C = \{1, -3\}$ y $D = \{2, 3, 6\}$, encontrar todos los pares ordenados (x, y) que satisfagan la relación

$$R = \{(x, y) / x + y = 3\}$$

Solución

El producto cartesiano de C x D está formado por los siguientes pares ordenados

$$C \times D = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (-3, 2), (-3, 3), (-3, 6)\}$$

Las parejas ordenadas que satisfacen que la suma de sus componentes sea igual a 3 son:

$$R = \{(1, 2), (-3, 6)\}$$

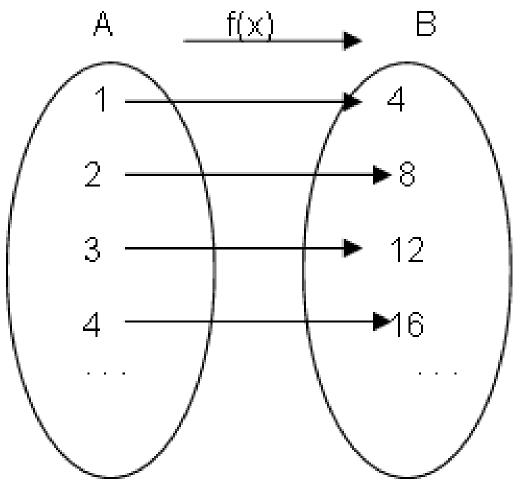
1) **Primera actividad: Explique en su cuaderno con sus propias palabras como se realizan los productos cartesianos de los ejemplos 1 y 2**

Toda relación queda definida si se conoce el conjunto de partida, el conjunto de llegada y la regla mediante la cual se asocian los elementos. En el ejemplo anterior, el conjunto de partida corresponde al conjunto **C**, el conjunto de llegada es el conjunto **D** y la expresión $\boldsymbol{x + y = 3}$ es la regla que asocia los elementos de los dos conjuntos.

Representación de una función

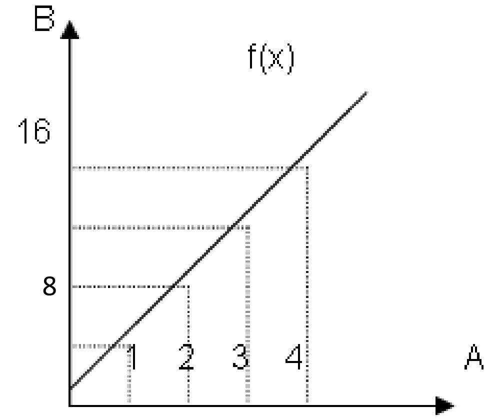
Una función se puede representar de cuatro formas, estas la veremos representadas con el siguiente ejemplo. Dada una función que toma a un número real y lo multiplica por 4

- Por diagrama sagital



8

- Por gráfico cartesiano



- Por extensión

f(x) = { (1 , 4) ; (2 , 8) ; (3 , 12) ; ….}

- Por comprensión

$f(x) = 4 \cdot x$

Para reconocer si una relación es una función en estas cuatro formas, hay que tener en cuenta:
1) Diagrama sagital
De todos los elementos del conjunto de partida debe salir una única flecha.

2) Gráfico cartesiano
Al trazar líneas verticales (paralelas al eje y) se debe cortar al gráfico siempre en un solo punto.

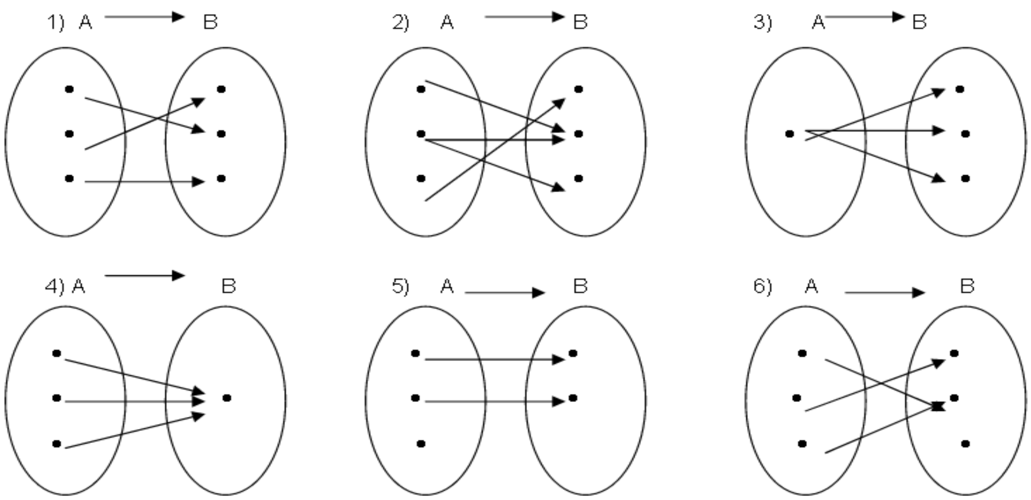
3) Extensión
En la primera coordenada de cada par ordenado deben aparecer todos los puntos sólo una vez.

4) Comprensión
Se debe analizar cada caso en particular, analizando sus restricciones

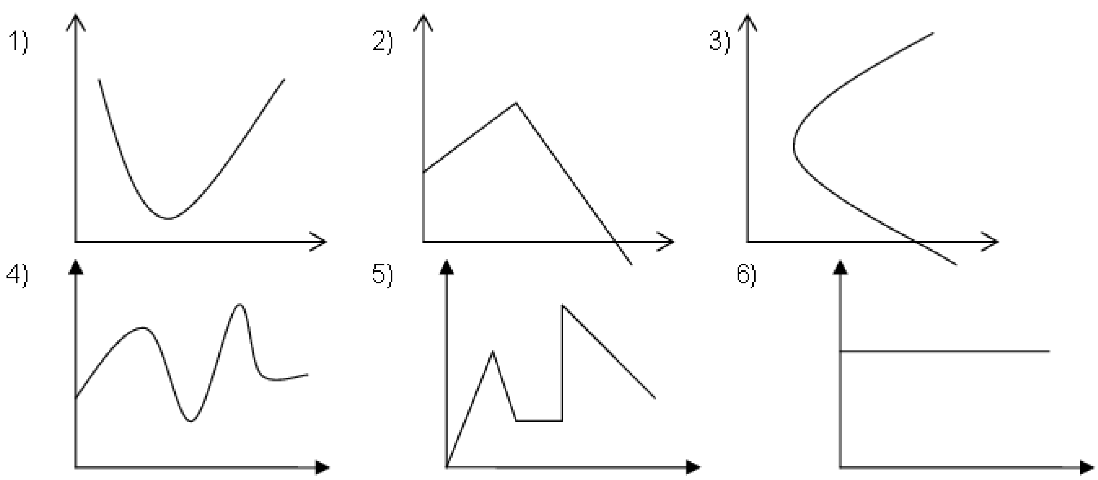
ACTIVIDAD 1

RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS JUSTIFICANDO EN CADA CASO POR QUE SON FUNCIÓN O NO LO SON:

I - ¿Cuál de los siguientes diagramas representan una función de A en B?



II - ¿Cuál de los siguientes gráficos representan una función de R^+ en R?



III - Sean los conjuntas A = {a , b , c} y B = {1 , 2 , 3 , 4}, ¿cuál de las siguientes relaciones representa una función de A en B?

1.- {(a , 1) ; (b , 2) , (a , 3) , (c , 4)}

2.- {(a , 1) ; (a , 2) , (a , 3) ; (a , 4)}

3.- {(a , 3) ; (b , 3) ; (c , 3)}

4.- {(c , 2) ; (b , 1)}

5.- {(a , 4) ; (c , 2) ; (b , 1)}

6.- {(a , 1) ; (b , 2) ; (b , 3)}

DOMINIO

El dominio de una función son los valores para los cuales la función está definida o en otras palabras, es el conjunto de todos los posibles valores que la función acepta.
Por ejemplo:

Si la función $f(x) = x^2$,   se le dan los valores x = {1,2,3....} entonces {1,2,3....} es el dominio.

RANGO

El rango de una función es el conjunto de todos los valores de salida de una función o es el conjunto formado por todos los valores que puede llegar a tomar la función.

Ejemplo: si a la función $f(x) = x^2$ se le dan los valores $x = \{1,2,3,...\}$ entonces el rango será $\{1,4,9,...\}$

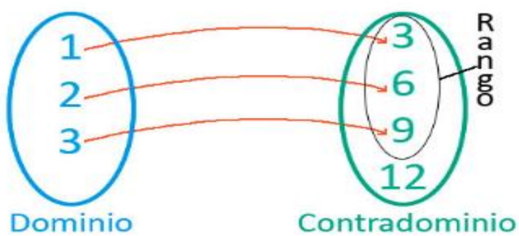
Ejercicio: Determine los conjuntos de números que representan el dominio y el el rango de cada una de las siguientes funciones representadas por pares ordenados

$f = \{(-1, 3), (-2, 5), (-3, 3), (-5, -3)\}$

$g = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$

FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA

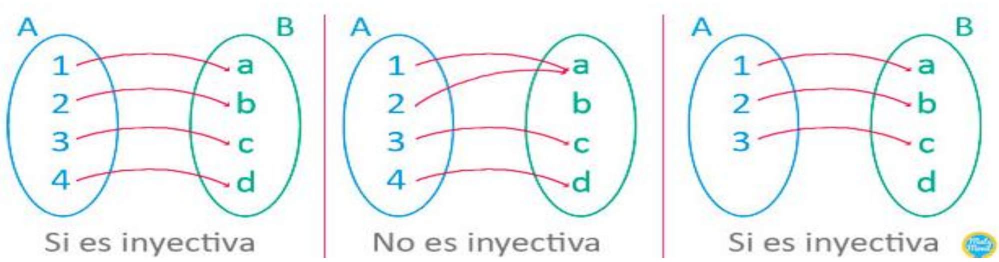
Recuerda que en una función, siempre tenemos un conjunto de partida (dominio), un conjunto de llegada (contradominio), y un rango:



Función inyectiva

Una función es inyectiva si cada elemento del conjunto de llegada corresponde como máximo a un elemento del conjunto de partida.

Otra definición es la siguiente: una función f: A -> B es inyectiva, si no existen 2 elementos de A (conjunto de llegada) con una misma imagen. Veamos algunos ejemplos:



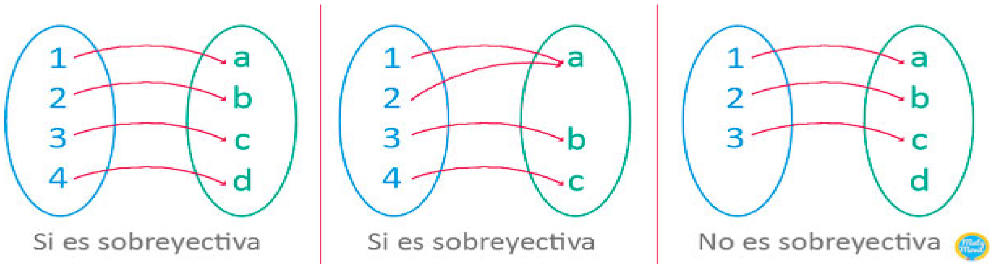
Para determinar si una función es inyectiva, tenemos que analizar la siguiente condición:

$$Si\ x_1;\ x_2\ \in Dom(f);\ f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Función sobreyectiva

Una función es sobreyectiva si cada elemento del conjunto de llegada (contradominio) corresponde por lo menos a un elemento del conjunto de partida.

Otra definición más simple es la siguiente: una función es sobreyectiva **si el rango es igual al conjunto de llegada** o contradominio. Veamos algunos ejemplos:

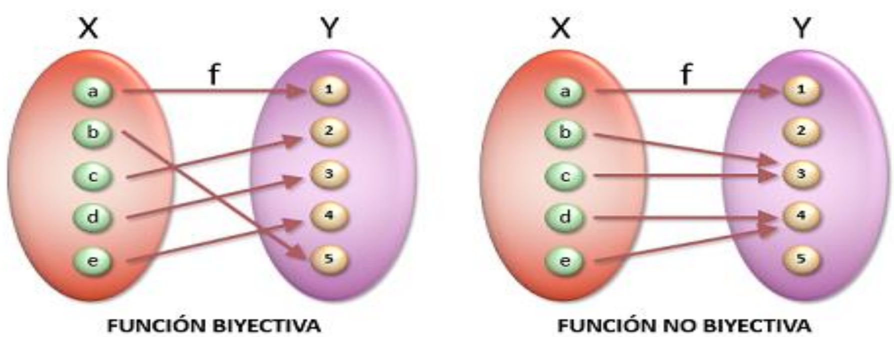


Para determinar si una función es sobreyectiva tenemos que determinar el rango. Por lo general, el conjunto de llegada es dato del problema. Si el rango que hemos hallado, es igual al conjunto de llegada, entonces se trata de una función sobreyectiva.

Función biyectiva

Una función "f" **es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.**

Otra definición es la siguiente: una función es biyectiva si cada elemento del conjunto de partida tiene una imagen distinta en el conjunto de llegada, y cada elemento del conjunto de llegada corresponde a un elemento del conjunto de partida.



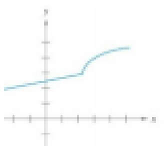
En el ejemplo de la derecha, f no es biyectiva ya que hay resultados de Y que tienen varios valores de origen en X (3 y 4) y varios resultados de Y que no tienen ningún valor de origen en X (2 y 5).

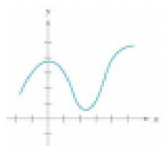
ACTIVIDAD 2

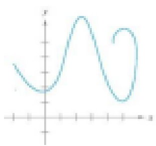
Nombre: ______________________________

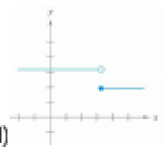
Funciones, Introducción

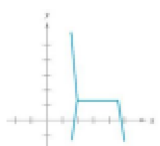
1. Determinar si las siguientes gráficas representan funciones o no:

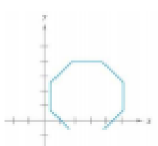
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

2. Determinar si las siguientes relaciones son funciones:

a) $f = \{(3;5);(4;6);(5;8)\}$

b) $f = \{(3;5);(5;3);(4;6)\}$

c) $f = \{(3;5);(4;6);(3;4)\}$

d) $f = \{(1;-1);(2;-2);(3;3)\}$

e) $f = \{(3;5);(4;6);(5;8);(3;6)\}$

3. Determinar si las siguientes tablas de valores representan funciones:

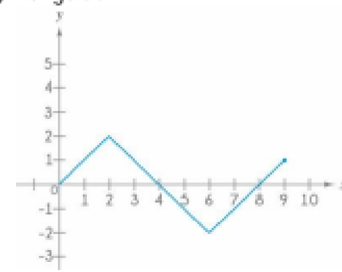
a)

x	1	3	5	7
y	3	5	7	3

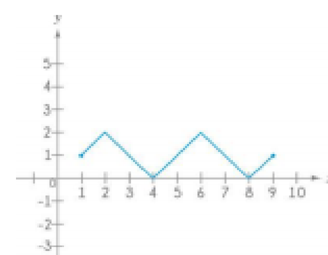
b)

x	1	3	1	4	5
y	3	5	7	9	11

4. De acuerdo a la gráfica de f(x), determinar:
a) f(3); f(5) y f(7)
b) Dominio de f
c) Rango de f



5. De acuerdo a la gráfica de f(x), determinar:
a) f(1); f(2); f(4) y f(9)
b) Dominio de f
c) Rango de f



Cómo graficar funciones básicas

1. Graficar la función: $y = 2x + 1$

2. Graficar la función: $y = \frac{x}{2}$

3. Graficar la función: $y = x^2 - 8$

4. Graficar la función: $y = 1 - x^2$

5. Graficar la función $f(x) = |x|$; siendo $|x|$ el valor absoluto de x; teniendo en cuenta que:

$$|x| = \begin{cases} -x; \, si \ x < 0 \\ x; \, si \ x \geq 0 \end{cases}$$

6. Graficar la función $f(x) = \sqrt{x}$

7. Graficar la función: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Intervalos

1. Representar gráficamente el intervalo: $[-3\,;\,+2]$

2. Representar gráficamente el intervalo: $(-3;\,+2)$

3. Representar gráficamente el intervalo: $(-5;0]$

4. Representar gráficamente el intervalo: $(-2;\,+\infty)$

5. Representar gráficamente el intervalo: $(-\infty;\,+\infty)$

6. Representar gráficamente el intervalo: $(-5;0]$

7. Representar gráficamente el intervalo: $(-\infty;+1]$

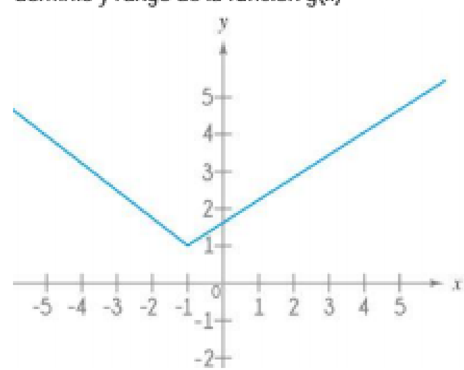
8. Representar matemáticamente el siguiente intervalo:

Dominio y rango

1. Encontrar el dominio y rango de la función: $y = 2x + 1$

2. Encontrar el dominio y rango de la función $y = x^2$

3. A partir de la siguiente gráfica, encontrar el dominio y rango de la función g(x)



4. Hallar dominio y rango de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$

5. Encontrar el dominio y rango de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$

6. Hallar el dominio y rango de la función: $f(x) = \sqrt{1-x}$

7. Encontrar el dominio y rango de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

Composición de funciones

La composición de una función f con otra g es una nueva función que representamos por $(g \circ f)$, definida del siguiente modo:

$\boxed{(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)]}$ se lee f compuesta con g.

Lo mismo para $(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)]$ se lee g compuesta con f.

Ejemplos

1. Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = 2x + 1$, y $g(x) = x^3$ halla las funciones $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.
   Para no liarnos: la función que me encuentro 1º hace de "esqueleto" y donde tenga x colocamos la otra, respetando el exponente que lleve la x.

   $(g \circ f)$

   Me encuentro 1º con g(x) la escribo así:

   $\boxed{\text{aqui colocamos la función } f(x)}^3$

   el resultado sería este: $(g \circ f) = \boxed{2x + 1}^3$

   $(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (2x + 1)^3$

   $(f \circ g)$

   Me encuentro 1º con f(x) la escribo así: $2\ \boxed{g(x)} + 1$

   $2(x^3) + 1$ el resultado sería: $(f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = 2x^3 + 1$

2. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $g(x) = x^2$, hallar $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$.

   $f[g(x)]$ $\Rightarrow (f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = \boxed{g(x)}^2 - 5\ \boxed{g(x)} + 3$

   $f[g(x)] = \boxed{x^2}^2 - 5\ \boxed{x^2} + 3 \Rightarrow f[g(x)] = x^4 - 5x^2 + 3$

   $g[f(x)]$ $\Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = \boxed{f(x)}^2$

   $(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (x^2 - 5x + 3)^2$

3. Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^2 + 5$, hallar $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$.

   $(g \circ f)$ $\Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = \boxed{f(x)}^2 + 5$

   $(g \circ f)_{(x)} = g[f(x)] = (\operatorname{sen} x)^2 + 5 \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = \operatorname{sen}^2 x + 5$

   $(f \circ g)$ $\Rightarrow (f \circ g)_{(x)} = f[g(x)] = \operatorname{sen}\ \boxed{g(x)}$

   $(f \circ g)_{(x)} = \operatorname{sen}(x^2 + 5)$

Función inversa o recíproca $f^{-1}(x)$

Relación entre una función y su recíproca

Son funciones simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Muy útil para calcular el recorrido de una función cuando no tenemos su gráfica. El dominio de la función recíproca es el conjunto imagen (recorrido) de la función original.

Se cumple: $\boxed{\left(f(x) \circ f^{-1}(x)\right) = x}$

$i(x)$ se llama función identidad, $i(x) = x$

Ejemplos

1. Calcular la función recíproca de $f(x) = 2x + 5$

- Cálculos

Para calcular una función inversa de otra, donde hay "x" ponemos "y", donde hay "y" ponemos "x" (respetando los exponentes). Despejamos la nueva "y", esa función es la recíproca.

Para resolver mejor, en lugar de poner f(x) vamos a escribir $y = 2x + 5$.

$$y = 2x + 5 \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = 2y + 5$$

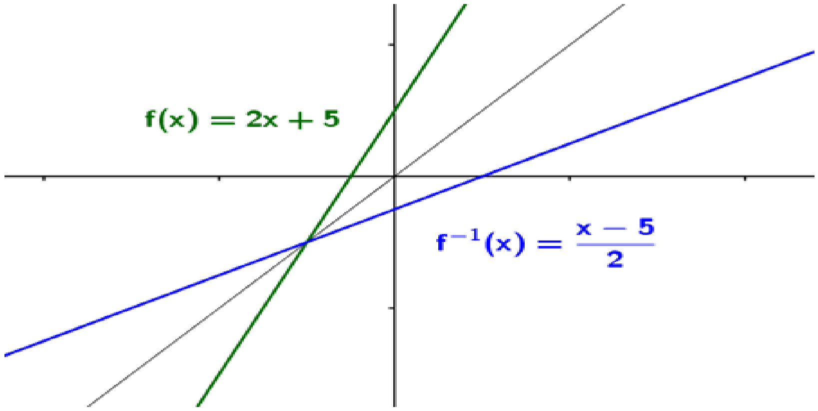
$$\xrightarrow{\text{Despejamos}} y = \frac{x - 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

- Comprobamos

$$\left(f(x) \circ f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x \; .$$

Obtenemos la función identidad, entonces $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son recíprocas.

Observa la gráfica de ambas funciones, son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.



2. Calcular la función recíproca de $f(x) = x^3 - 6$

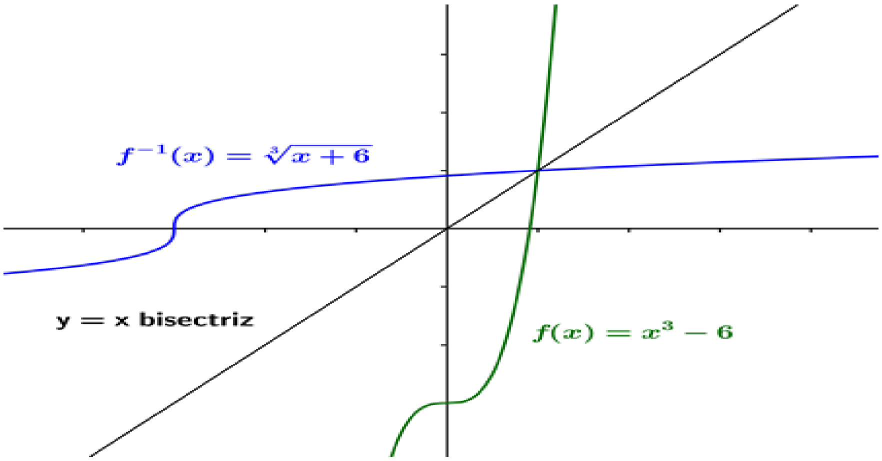
$$y = x^3 - 6 \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = y^3 - 6$$

$$\xrightarrow{\text{Despejamos}} y = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$$

Comprobamos

$$\left(f(x) \circ f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{x+6}}^3 - 6 = \left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3 - 6 = x$$

Observa la simetría de ambas gráficas.



3. Calcular la función recíproca de $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

$$y = \frac{x+3}{x-2} \xrightarrow{\text{Cambiamos}} x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$\xrightarrow{\text{Despejamos}} x(y-2) = y+3 \Rightarrow xy - 2x = y + 3$$

$$xy - y = 2x + 3 \Rightarrow y(x-1) = 2x + 3$$

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Comprobamos $\left(f(x) \circ f^{-1}(x)\right) = x$

$$\frac{\boxed{\frac{2x+3}{x-1}}+3}{\boxed{\frac{2x+3}{x-1}}-2} = \frac{\frac{2x+3+3x-3}{x-1}}{\frac{2x+3-2x+2}{x-1}} = \frac{5x}{5} = x$$

Función compuesta

1. Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$; encontrar la función $(f∘g)(x)$ y $(f∘g)(5)$.

2. Si $f(x) = 2x$, $g(x) = 1 - x$; encontrar la función $(f∘g)(x)$.

3. Si $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = 2x + 4$; encontrar fog y su dominio.

4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = 2x + 4$; encontrar gof y su dominio.

5. Si $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{x}{x+2}$; encontrar fog y su dominio.

6. Si $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{2-x}$; encontrar gof y su dominio.

7. Si $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $g(x) = \frac{1}{x}$; encontrar fog y su dominio.

8. Si $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = x^3$; $h(x) = x^2 + 2$. Encontrar fogoh

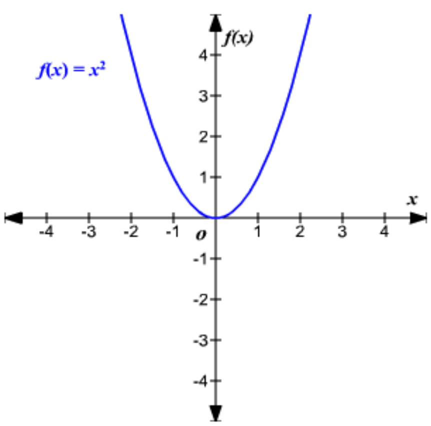
9. Si $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \frac{x}{x-1}$; $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Encontrar fogoh.

Funciones Par / Impar

Una función es **par** si, para cada x en el dominio de f, $f(-x) = f(x)$. Las funciones pares tienen simetría reflectiva a través del eje de las y.

Ejemplo de una función par:

$f(x) = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

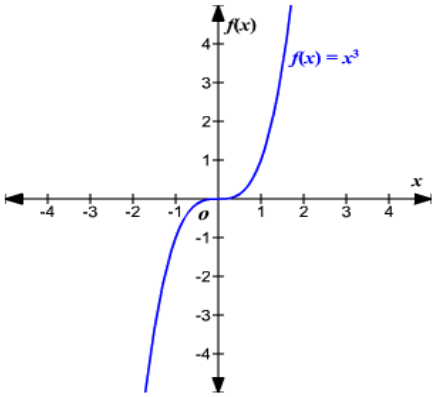


Una función es **impar** si, para cada x en el dominio de f, $f(-x) = -f(x)$. Las funciones impares tienen simetría rotacional de 180° con respecto al origen.

Ejemplo de una función impar:

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



ACTIVIDAD 4

1. Determinar si la siguiente función es par o no:
   $f(x) = x^2 + 1$

2. Determinar si la siguiente función es impar o no: $f(x) = x^3+1$

Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o no tienen paridad:

3. $f(x) = x^3 + x$

4. $f(x) = 3x - x^3$

5. $f(x) = 1 - x^4$

6. $g(x) = x^2 - 2x$

7. $g(x) = -7x^2 - 4$

8. $f(x) = (x-1)^2$

9. $f(x) = \frac{4}{x^2}$

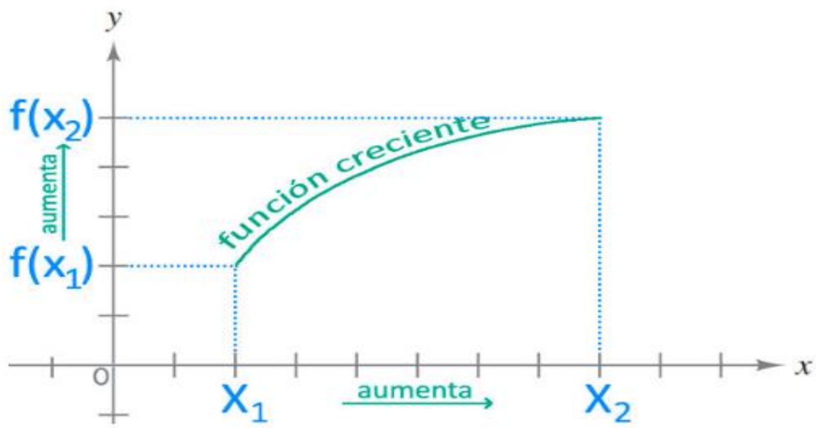
10. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$

Función creciente

A medida que aumenta el valor de x, aumenta el valor de y. La definición es la siguiente: **una función es creciente en un intervalo si se cumple que:**

$$x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) < f(x_1)$$

Veamos un ejemplo gráfico:

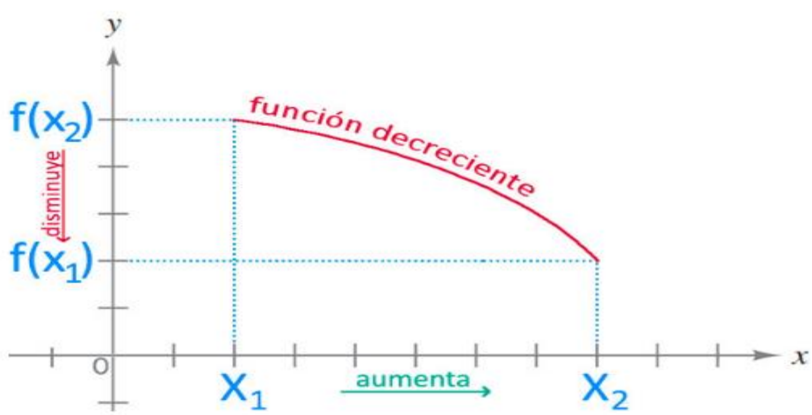


Función decreciente

A medida que aumenta el valor de x, disminuye el valor de y. La definición es la siguiente: **una función es decreciente en un intervalo si se cumple que:**

$$x_1 < x_2 \ \rightarrow f(x_1) > f(x_1)$$

Veamos un ejemplo gráfico:

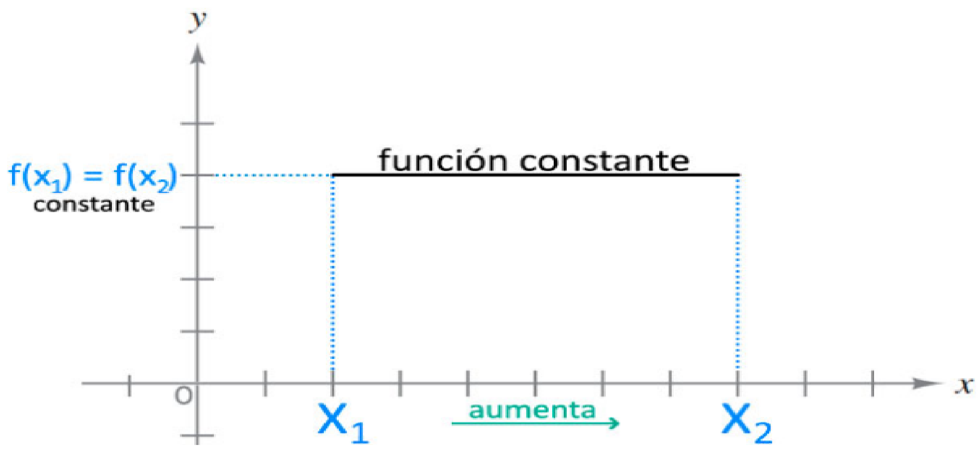


Función constante

A medida que aumenta el valor de x, se mantiene el mismo valor en y. La definición es la siguiente: **una función es constante en un intervalo si se cumple que:**

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_1)$$

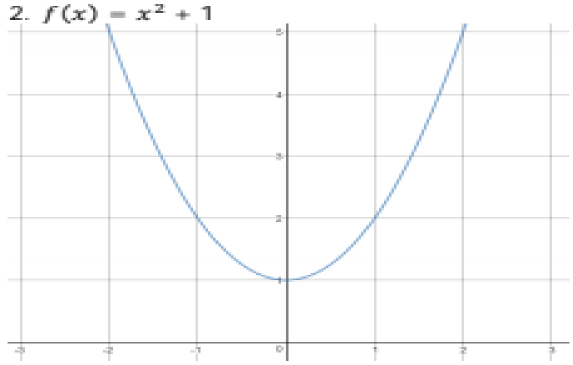
Veamos un ejemplo gráfico:



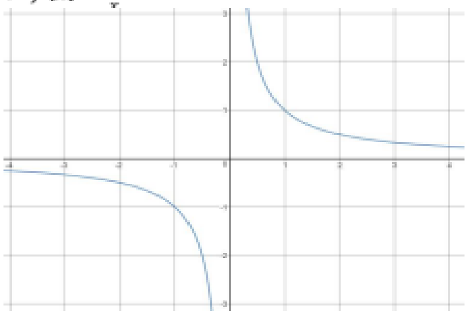
ACTIVIDAD 5

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones (utilice la gráfica cuando esté en el problema):

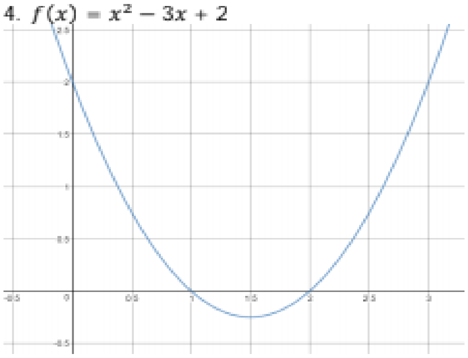
1. $f(x) = x + 2$
2. $f(x) = x^2 + 1$



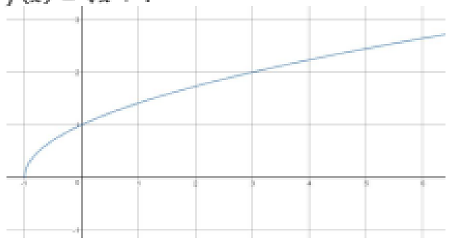
3. $f(x) = \frac{1}{x}$



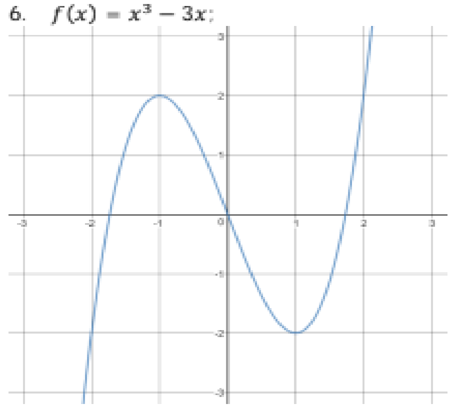
4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$



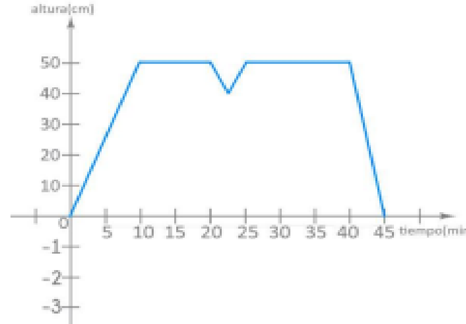
5. $f(x) = \sqrt{x+1}$



6. $f(x) = x^3 - 3x;$



7. La siguiente gráfica muestra la altura del nivel de agua en una tina de baño en función del tiempo. Interprete la gráfica y de una descripción de lo que puede estar ocurriendo en la tina.



Bibliografia:

Tomado de: https://matemovil.com/funcion-inyectiva-sobreyectiva-y-biyectiva-ejercicios-resueltos/

Tomado de: https://www.matematicas10.net/2017/04/ejemplos-de-funcion-biyectiva.html

Tomado de: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/even-odd-functions

Tomado de: https://matemovil.com/funciones-crecientes-decrecientes-y-constantes/

INSTITUCIÓN EDUCATIVA INEM "JORGE ISAACS"

"UNIDOS EN EL AMOR FORMAMOS LA MEJOR INSTITUCIÓN"
Departamento de: Matemáticas.
Material: "QUEDATE EN CASA"
Conceptos Previos: Operaciones Básicas
DESARROLLANDO COMPETENCIAS
GUÍA 2 (3 semanas) Razones-proporciones, porcentaje y probabilidad

Área: Matemáticas
Asignatura: Cálculo.
Grado: 11°
Periodo: II (10 de Mayo – 27 de Agosto)

Tiempo estimado para el desarrollo de la guía 2 por parte de los estudiantes: 3 semanas (26 de Julio a 13 de Agosto)

Estudiante: ________________________________Código:___________Grado: 11°-___ Fecha: __________________

Recuerda tus medidas de protección contra el COVID 19. Mantén tus manos limpias. En caso de tener síntomas llama por teléfono a tu servicio de salud para que te el médico te indique que debes hacer, en caso que los síntomas sean tos seca, garganta afectada, fuerte dolor de cabeza y debilidad. La higiene bucal con bicarbonato de soda o sal es el primer paso a combatirlo.

Docente(s):	**correo electrónico (envió de trabajos y demás):**
Guillermo Arias Parra	d.ine.guillermo.arias@cali.edu.co
Fernando Bastidas Parra	d.ine.fernando.bastidas@cali.edu.co
Juan José Jaramillo Arcila	d.ine.juan.jaramillo@cali.edu.co
Juan Carlos Llanten Montenegro	d.ine.juan.llanten@cali.edu.co
Javier Hernando Ochoa Arteaga	d.ine.javier.ochoa@cali.edu.co
Justo Javier Ortiz Camacho	d.ine.justo.ortiz@cali.edu.co
Jose Nolberto Patiño	d.ine.jose.patino@cali.edu.co
David Adrián Salgado Arias	d.ine.david.salgado@cali.edu.co

CRITERIOS PARA LA VALORACIÓN DE L@S GUÍAS, TALLERES, CONSULTAS, ENTRE OTRAS:

1. Desarrollar la guía 3 de manera individual (pueden utilizar herramientas tecnológicas para trabajar en grupos, pero cada uno envía fotos de su trabajo en su respectivo cuaderno o blog).
2. La guía 3 se debe desarrollar con su debida justificación en el cuaderno, después se deben enviar las fotos del desarrollo del cuaderno de manera organizada en un solo documento (archivo) PDF (el cual se debe llamar con el nombre completo del estudiante, grado y asignatura) al correo electrónico correspondiente al docente asignado.
3. No se permiten fotocopias
4. Para enviar trabajos lo deben hacer utilizando el correo que fue creado por la alcaldía, de lo contrario no será tenido en cuenta, cualquier anomalía comunicar al director de grupo y al profesor para dar una solución.
5. Debe quedar evidencia de todo el trabajo desarrollado en el cuaderno y en el correo electrónico en el cual se envió el mismo, por si se presenta alguna anomalía.
6. Presentar en la fecha estipulada por la institución o el profesor encargado.

Estándares:

- Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico.
- Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).
- Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos.

Nivel(es) de desempeño(s):
Desempeño:
Básico:

- Reconoce los diferentes eventos que se proponen en una situación o problema
- Interpreta y asigna la probabilidad de cada evento

Alto:

- Propone problemas a estudiar en variedad de situaciones aleatorias.
- Formula Hipótesis relativas al análisis del comportamiento de una muestra de datos asociada a situaciones problema de diversos contextos.

Superior:

- Usa la probabilidad condicional de cada evento para decidir si son o no independientes.
- Justifica la elección de métodos e instrumentos estadísticos para la solución de una situación problema dada.

Derechos básicos de aprendizaje:

- Plantea y resuelve situaciones problemáticas del contexto real y/o matemático que implican la exploración de posibles asociaciones o correlaciones entre las variables estudiadas.
- Plantea y resuelve problemas en los que se reconoce cuando dos eventos son o no independientes y usa la probabilidad condicional para comprobarlo.

Competencia ciudadana:

- Identifico y supero emociones, como el resentimiento y el odio, para poder perdonar y reconciliarme con quienes he tenido conflictos.

Recuerda que lo importante es la justificación y la redacción del mismo

Introducción:

El deseo de la humanidad de conocer los eventos futuros, originó el concepto de probabilidad.

El estudio de las probabilidades interesó a los jugadores y partidarios de los pasatiempos. Posteriormente, se perfeccionaron las técnicas y a la probabilidad se le dio otros usos.

En la actualidad, se ha continuado el estudio de nuevas metodologías que han permitido maximizar el uso de la computación en el estudio de las probabilidades disminuyendo, de este modo, los márgenes de error en los cálculos.

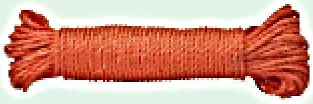
La probabilidad de ocurrencia de un suceso puede definirse como la proporción de veces que ocurriría dicho suceso si se repitiese un experimento o una observación en un número grande de ocasiones, bajo condiciones similares. Por definición, entonces, la probabilidad se mide por un número entre cero y uno: si un suceso no ocurre nunca, su probabilidad asociada es cero, mientras que si ocurriese siempre su probabilidad sería igual a uno. Así, las probabilidades suelen venir expresadas como decimales, fracciones o porcentajes.

RAZÓN Y PROPORCIÓN

Magnitudes

Una **magnitud** es cualquier cualidad que se puede medir, y su valor, expresarlo mediante un número.

La longitud es una magnitud.



Esta cuerda mide 16 m.

El peso es una magnitud.

El melón pesa 1,5 kg.

No son magnitudes los meses del año, el nombre de las personas...

Razón

Una **razón** entre dos números, a y b, es el cociente $\frac{a}{b}$.

En mi clase somos 14 chicas y 9 chicos, ¿qué relación existe entre chicas y chicos?

La relación entre chicas y chicos en mi clase es de 14 a 9.

Esto se puede expresar mediante la razón $\frac{14}{9}$.

En una fracción, el numerador y el denominador son números enteros. En una razón no es necesario.

$\frac{13}{2}$ → Es una razón y una fracción.

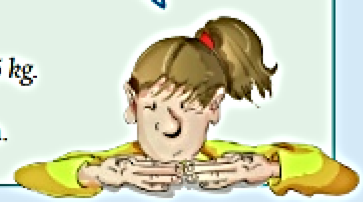
$\frac{3,5}{2}$ → Es una razón pero no es una fracción.

Proporción

Una **proporción** es la igualdad entre dos razones.

Para pintar 4 m² de pared necesito 5 kg de pintura. Y para pintar 6 m² necesito 7,5 kg.

Razón: $\frac{4}{5}$ Razón: $\frac{6}{7,5}$ $\frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = 0,8$ → Forman una proporción.



1 Proporcionalidad directa

NO OLVIDES

Magnitudes directamente proporcionales

Magnitud M	a	b	c
Magnitud M'	a'	b'	c'

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

k → Constante de proporcionalidad directa

ANTES, DEBES SABER...

Cuándo dos razones forman proporción

Dos razones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, forman una proporción, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, cuando se cumple esta propiedad: $a \cdot d = b \cdot c$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \text{ porque: } 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$$

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando el cociente entre dos cantidades correspondientes de ambas, a y b, es constante:

$$\frac{a}{b} = k$$

El número k es la **constante o razón de proporcionalidad directa**.

EJEMPLO

1 **Marta realiza un trabajo por horas y cobra 12 € cada hora.**

a) ¿Cuánto recibirá si trabaja 2 horas? ¿Y si trabaja 3 horas?

a) Marta cobra 12 € por 1 hora de trabajo. En 2 horas ganará el doble, en 3 horas el triple…

Podemos reflejar esta situación mediante una tabla de valores.

Ganancia (€)	12	24	36	48	60	72	…
Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6	…

Las magnitudes *Ganancia – Tiempo* son magnitudes directamente proporcionales. Al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda multiplicada (o dividida) por ese mismo número.

$$\text{GANANCIA} \rightarrow \frac{12}{1} = \frac{24}{2} = \frac{36}{3} = \ldots = 12 \leftarrow \text{RAZÓN}$$
$$\text{TIEMPO} \rightarrow$$

2 Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el producto de dos cantidades correspondientes de ambas, a y b, es constante:

$$a \cdot b = k$$

El número k es la **constante o razón de proporcionalidad inversa**.

NO OLVIDES

Magnitudes inversamente proporcionales

Magnitud M	a	b	c
Magnitud M'	a'	b'	c'

$a \cdot a' = b \cdot b' = c \cdot c' = k$

$k \rightarrow$ Constante de proporcionalidad inversa

EJEMPLO

2 **Un tren que circula a una velocidad constante de 60 km/h, emplea 5 horas en recorrer un trayecto.**

a) ¿Cuántas horas empleará en recorrer dicho trayecto si su velocidad es de 30 km/h? ¿Y si la velocidad es de 10 km/h?

a) Si el tren circula a 30 km/h, que es la mitad de la velocidad, tardará el doble del tiempo, 10 horas. Si reduce la velocidad a la sexta parte: 10 km/h, tardará seis veces más, 30 horas…

Podemos reflejar esta situación mediante una tabla de valores.

Velocidad (km/h)	60	30	10	40	…
Tiempo (h)	5	10	30	7,5	…

Las magnitudes *Velocidad – Tiempo* son magnitudes inversamente proporcionales. Al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

$$\text{VELOCIDAD} \rightarrow \boxed{60} \cdot \boxed{5} = 30 \cdot 10 = 10 \cdot 30 = \ldots = 300 \leftarrow \text{RAZÓN}$$

TIEMPO

3 Regla de tres simple

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se calcula un término desconocido en una proporción

Para calcular el término desconocido de una proporción, primero se aplica la propiedad de las proporciones y, después, se despeja x.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{x} \xrightarrow{\text{Por ser proporción}} \boxed{3} \cdot x = 6 \cdot 4 \rightarrow x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8$$

Pasa dividiendo

Cuando dos magnitudes son proporcionales, y no conocemos una de las cuatro cantidades relacionadas, podemos hallarla mediante una **regla de tres simple**.

3.1 Regla de tres simple directa

La **regla de tres simple directa** es una técnica que nos permite calcular el valor de una cantidad, conociendo otras tres cantidades relacionadas de dos magnitudes directamente proporcionales.

EJEMPLO

3 **Si 6 revistas de automóviles cuestan 18 €, ¿cuánto costarán 9 revistas?**

Averiguamos si existe proporcionalidad entre las dos magnitudes:

- Si compramos el doble de revistas, el precio se duplica.
- Si compramos la mitad, el precio se reduce a la mitad.

Las magnitudes *Número de revistas – Precio* son directamente proporcionales.

Planteamos la regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si 6 revistas} \xrightarrow{\text{cuestan}} 18\ € \\ \text{9 revistas} \xrightarrow{\text{costarán}} x\ € \end{array}\right\}$$

Aplicando las propiedades de la proporcionalidad directa:

$$\frac{6}{9} = \frac{18}{x}$$

Para calcular el valor de x aplicamos la propiedad de las proporciones:

$$6 \cdot x = 9 \cdot 18$$

Y despejamos x: $\quad x = \frac{9 \cdot 18}{6} = 27$

El precio de 9 revistas es 27 **€**.

3.2 Regla de tres simple inversa

ANTES, DEBES SABER...

Cuál es la fracción inversa de una fracción

La **fracción inversa** de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

La fracción inversa de $\frac{8}{3}$ es $\frac{3}{8}$. La fracción inversa de $-\frac{8}{3}$ es $-\frac{3}{8}$.

La fracción inversa de $\frac{1}{4}$ es $\frac{4}{1} = 4$. La fracción inversa de $-\frac{1}{4}$ es $-\frac{4}{1} = -4$.

DATE CUENTA

El inverso de un número a es $\frac{1}{a}$.

El inverso de 7 es $\frac{1}{7}$.

La **regla de tres simple inversa** es una técnica que nos permite calcular el valor de una cantidad, conociendo otras tres cantidades relacionadas de dos magnitudes inversamente proporcionales.

EJEMPLO

4 **Un edificio es pintado por 12 obreros en 15 días. ¿Cuántos días emplearán 20 obreros en pintar el mismo edificio?**

El primer paso es averiguar si existe algún tipo de proporcionalidad entre las dos magnitudes:

- Si trabajan el doble de obreros, tardarán la mitad de días.
- Si trabajan la mitad de obreros, el número de días que tardarán será el doble.

Las magnitudes *Número de obreros – Días* son inversamente proporcionales.

El planteamiento de la regla de tres simple inversa es similar al de la regla de tres simple directa:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } 12 \text{ obreros} \xrightarrow{\text{tardan}} 15 \text{ días} \\ \quad 20 \text{ obreros} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ días}\end{array}\right\}$$

Sin embargo, en la resolución debemos tener en cuenta que, en vez de la segunda fracción, consideramos su inversa:

$$\frac{12}{20} = \frac{x}{15}$$

Para calcular el valor de x aplicamos la propiedad de las proporciones:

$$12 \cdot 15 = 20 \cdot x$$

Y despejamos x: $x = \frac{12 \cdot 15}{20} = 9$

Por tanto, los 20 obreros emplearán 9 días en pintar el edificio.

En general, para resolver una regla de tres simple inversa, aplicaremos el siguiente cálculo:

$$\left.\begin{array}{l} a \rightarrow b \\ c \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{x}{b} \rightarrow x = \frac{a \cdot b}{c}$$

6 Problemas con porcentajes

CALCULADORA

Para hallar un tanto por ciento en la calculadora utilizamos la tecla [%].

35 % de 460

[4] [6] [0] [×]
[3] [5] [%] → [161]

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se calcula el tanto por ciento de una cantidad

Para calcular el tanto por ciento de una cantidad multiplicamos esa cantidad por el porcentaje y dividimos entre 100.

$$20\,\%\text{ de }250 = 250\cdot\frac{20}{100} = 50 \qquad 8\,\%\text{ de }300 = 300\cdot\frac{8}{100} = 24$$

6.1 Cálculo de porcentajes

Un **porcentaje o tanto por ciento** expresa la cantidad de una magnitud correspondiente a 100 unidades de la otra. Se escribe con el signo %.

EJEMPLOS

8 **En un instituto de 200 alumnos, el 25 % de los alumnos llevan gafas. ¿Cuántos alumnos llevan gafas?**

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si de 100 alumnos} \xrightarrow{\text{llevan gafas}} 25 \text{ alumnos}\\ \text{de 200 alumnos} \xrightarrow{\text{llevarán gafas}} x \text{ alumnos}\end{array}\right\}$$

$$\frac{100}{200} = \frac{25}{x} \rightarrow x = \frac{200\cdot 25}{100} = 50 \text{ alumnos}$$

9 **¿Qué porcentaje de aciertos tuve si encesté 7 canastas de 32 intentos?**

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si de 32 intentos} \xrightarrow{\text{encesté}} 7\\ \text{de 100 intentos} \xrightarrow{\text{encestaré}} x\end{array}\right\} \rightarrow \frac{32}{100} = \frac{7}{x} \rightarrow x = \frac{7\cdot 100}{32} = 21{,}88\,\%$$

Tuve un 21,88 % de aciertos.

2 **Están estropeados 240 tornillos, que corresponden al 8 % de los tornillos fabricados. ¿Cuántos tornillos se han fabricado?**

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si de 100 tornillos} \xrightarrow{\text{se estropean}} 8 \text{ tornillos}\\ \text{de } x \text{ tornillos} \xrightarrow{\text{se estropean}} 240 \text{ tornillos}\end{array}\right\}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{8}{240} \rightarrow x = \frac{100\cdot 240}{8} = 3\,000 \text{ tornillos}$$

Actividad para entregar #1

FECHA DE ENTREGA:

Proporcionalidad directa e inversa

LO QUE DEBES SABER RESOLVER

1 Determina si estas tablas representan magnitudes directamente proporcionales.

Magnitud *A*	2	4	6
Magnitud *B*	8	16	24

Magnitud *A*	6	12	18
Magnitud *B*	5	10	20

2 Halla si los siguientes pares de magnitudes son directamente proporcionales.

a) El precio de una barra de pan y el importe que tengo que pagar por el número de barras que compro.

b) El día del mes y la temperatura que hay.

c) El tiempo que se tarda en llegar a un sitio y la velocidad con la que me aproximo.

3 Determina si estas tablas tienen valores correspondientes a magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitud *A*	12	6	3
Magnitud *B*	4	8	16

Magnitud *C*	24	8	4
Magnitud *D*	18	6	2

Magnitud *E*	6	3	2
Magnitud *F*	24	48	72

Si son inversamente proporcionales, calcula su razón.

4) Clasifica en proporcionalidad directa o inversa.

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.

b) Obreros y tiempo en acabar un trabajo.

Regla de tres simple directa

5) En la cocina de un instituto han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿Cuánto tendrían que pagar si hubieran comprado 45 barras?

6) Un coche gasta en gasolina 0,46 € cada 4 km. ¿Cuánto costará el combustible en un viaje de 270 km si mantiene el mismo consumo?

Regla de tres simple inversa

7) Un coche recorre un trayecto a 90 km/h en 8 horas. ¿A qué velocidad iría si tardase 9 horas?

8) Si 9 pintores tardan 26 horas en pintar la fachada de un edificio, ¿cuánto tardarán 6 pintores?

Porcentajes

9) Calcula el 15 % de 300, 4 500 y 60 000.

10) Un embalse con capacidad de 200 hm^3 se encuentra al 45 % de su capacidad. ¿Qué cantidad de agua contiene?

11) En un periódico se dice que 80 de cada 1 500 personas practican deportes de riesgo. Expresa este dato en porcentaje.

12) ● ¿Qué porcentaje representan 35 personas de un total de 140?

13) ● Tres de cada cinco alumnos han tenido la gripe en el mes de enero. Expresa este dato en forma de porcentaje.

14) ● Expresa en porcentajes estos resultados.

a) 14 aciertos de 23 tiros libres.
b) 7 canastas de 3 puntos de un total de 11.
c) 12 canastas de 2 puntos de 21 intentos.

15) ● Por un CD que cuesta 21 € me hacen un 15 % de descuento. ¿Cuánto dinero me ahorro?

16) ●● En un instituto, 63 alumnos, que son el 15 % del total, han viajado al extranjero. ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

CONCEPTOS BÁSICOS DE PROBABILIDAD

En esta guía de aprendizaje exploraremos conceptos básicos relacionados con la probabilidad de eventos y su utilidad en situaciones cotidianas:

1 Experimentos aleatorios. Sucesos

1.1 Experimentos aleatorios

Los experimentos, dependiendo de sus resultados, pueden ser:

- **Aleatorios** ⟶ No podemos predecir el resultado que se obtendrá al realizarlos, es decir, depende del azar.
- **Deterministas** → Conocemos de antemano el resultado.

EJEMPLO

1 **Clasifica estos experimentos en aleatorios o deterministas.**

a) Lanzar una moneda → Experimento aleatorio
Puede salir cara o cruz, no sabemos de antemano el resultado.

b) Sumar dos números conocidos → Experimento determinista
Siempre obtenemos como resultado la misma suma.

1.2 Sucesos

Cada posible resultado al realizar un experimento aleatorio se llama **suceso elemental**, y el conjunto de todos los sucesos elementales es el **espacio muestral**, *E*.
En general, un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral.

EJEMPLO

2 **Determina el espacio muestral, los sucesos elementales y algún suceso compuesto del experimento aleatorio de lanzar un dado de parchís.**

Al lanzar un dado podemos obtener 6 posibles resultados: que salga 1, que salga 2, que salga 3, …

Espacio muestral ⟶ $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Cada posible resultado es un suceso elemental.

Sucesos elementales → $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ y $\{6\}$

Varios sucesos elementales forman un suceso compuesto.

Sucesos compuestos → «Obtener número par» $= \{2, 4, 6\}$
«Obtener múltiplo de 3» $= \{3, 6\}$

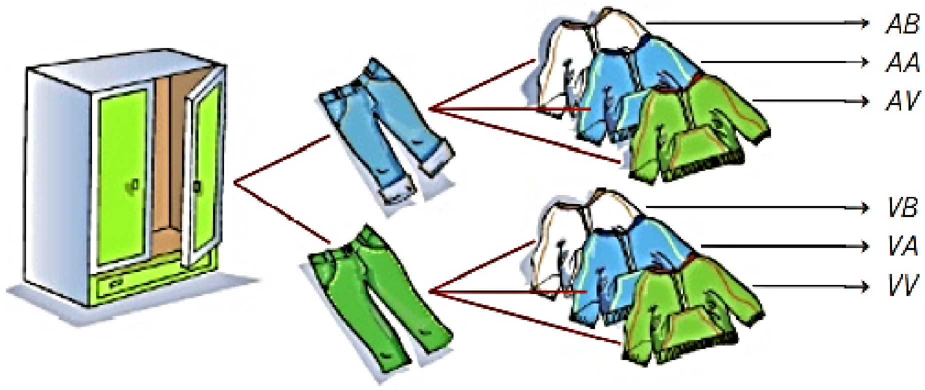
1.3 Diagrama de árbol

Para determinar los sucesos elementales y el espacio muestral, asociados a un experimento aleatorio, podemos utilizar un **diagrama de árbol**.

EJEMPLOS

3 **Marta tiene en su armario 2 pantalones de colores azul y verde, respectivamente, y 3 jerséis de colores blanco, azul y verde. Si escoge al azar unos pantalones y un jersey, ¿cuál será el espacio muestral?**

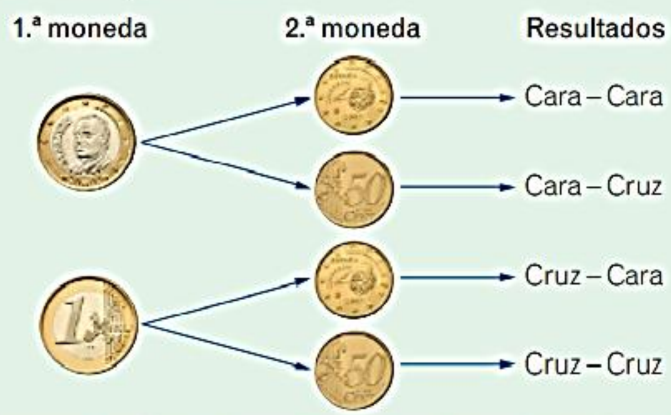
Podemos escoger primero el pantalón y, después, elegimos entre las tres opciones de jersey. Este sería su diagrama de árbol.



Cada uno de los casos de la derecha es un suceso elemental y, por tanto, el espacio muestral es: $E = \{AB, AA, AV, VB, VA, VV\}$

Se lanzan dos monedas y se observan los resultados. ¿Cuál será el espacio muestral?

Las posibilidades en la primera moneda son cara o cruz, y en la segunda tenemos las mismas posibilidades.



Espacio muestral → {Cara – Cara, Cara – Cruz, Cruz – Cara, Cruz – Cruz}

Sucesos elementales → {Cara – Cara} {Cara – Cruz}
{Cruz   Cara} {Cruz   Cruz}

2 Operaciones con sucesos

El suceso **contrario** o **complementario** de un suceso A, $\overline{A}$, es el formado por todos los sucesos elementales que no están en A.

EJEMPLO

2 **En el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado, determina los siguientes sucesos.**

a) El espacio muestral.

b) Obtener un número mayor que 4.

c) No obtener un número mayor que 4.

d) Obtener el número 3.

e) Obtener cualquier número excepto el 3.

f) Obtener un número par.

g) Obtener un número impar.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) A = «Obtener un número mayor que 4» = $\{5, 6\}$

c) Si A = «Obtener un número mayor que 4» = $\{5, 6\}$

Entonces, $\overline{A}$ = «No obtener un número mayor que 4»

$\overline{A}$ está formado por todos los elementos de E menos los elementos de A. Es decir:

$\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

d) B = «Obtener el número 3» = $\{3\}$

e) Si B = «Obtener el número 3» = $\{3\}$

Entonces, $\overline{B}$ = «No obtener el número 3» =

= «Obtener cualquier número excepto el 3»

$\overline{B}$ está formado por todos los elementos de E menos los elementos de B. Es decir:

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

f) C = «Obtener un número par» = $\{2, 4, 6\}$

g) Si C = «Obtener un número par» = $\{2, 4, 6\}$

$\overline{C}$ = «No obtener un número par» = «Obtener un número impar»

$\overline{C}$ está formado por todos los elementos de E menos los elementos de B. Es decir:

$\overline{C} = \{1, 3, 5\}$

3 Probabilidad de un suceso

La **probabilidad de un suceso** es un número entre 0 y 1 que indica la posibilidad de que ocurra dicho suceso. A mayor probabilidad, mayor es la posibilidad de que ocurra.

SE ESCRIBE ASÍ

E → Espacio muestral
$\varnothing$ → Conjunto vacío (no hay ningún elemento)

De esta forma, si un suceso ocurre siempre su probabilidad es 1, y decimos que es un **suceso seguro**, $P(E) = 1$.

Análogamente, si un suceso nunca ocurre su probabilidad es 0, y entonces diremos que es un **suceso imposible**, $P(\varnothing) = 0$.

EJEMPLO

7 Tenemos 2 bolas iguales en una bolsa, una azul y otra amarilla. Si introducimos la mano en la bolsa y extraemos una bola, calcula la probabilidad de que salga:

a) Una bola azul o amarilla.

b) Una bola verde.

c) Una bola azul.

d) Una bola amarilla.

a) P(bola azul o amarilla) = 1 → Es un suceso seguro.

b) P(bola verde) = 0 ⟶ Es un suceso imposible.

c) y d) Como las dos bolas son idénticas salvo en el color, la probabilidad de extraer cada una de ellas será igual.

P(bola azul) = P(bola amarilla)

Por tanto, tiene sentido repartir la probabilidad de ocurrencia total, 1, entre los dos sucesos elementales.

$P(\text{bola azul}) = \dfrac{1}{2}$

$P(\text{bola amarilla}) = \dfrac{1}{2}$

EJEMPLO

En una caja hay 24 semillas, de las cuales diez son almendras y, el resto, avellanas. Si se escoge una semilla al azar y se quiere saber cuál es la probabilidad de que sea una almendra y cuál es la probabilidad de que sea una avellana, se calcula: $P(A)$ y $P(\overline{A})$.

A: *Sacar una semilla de almendra.* Por lo tanto, $P(A) = \dfrac{10}{24}$.

$\overline{A}$: *Sacar una semilla de avellana.* Por lo que, $P(\overline{A}) = \dfrac{14}{24}$.

Observa que $P(A) + P(\overline{A}) = \dfrac{10}{24} + \dfrac{14}{24} = 1$.

Actividad para entregar #2

FECHA DE ENTREGA:

Recuerde que debe entregar las actividades que se le vayan asignando en esta guía con sus respectivas sustentaciones

1) Indique cuales de los siguientes experimentos son aleatorios y cuales deterministas. Justifique su respuesta

- **Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.**

a) Extraer una carta de la baraja española.

b) Medir la hipotenusa en un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm.

c) Lanzar 3 monedas y anotar el número de caras.

d) Lanzar una chincheta y observar en qué posición queda.

e) Apretar el pulsador que enciende una bombilla en un circuito eléctrico.

f) Elegir al azar una ficha de dominó.

g) Medir la altura de un aula.

h) Lanzar una piedra al vacío y medir la aceleración.

i) Averiguar el resultado de un partido antes de que se juegue.

2) Construya los siguientes diagramas de árbol

Ejercitación

1 Elabora un diagrama de árbol para determinar lo que se indica en cada caso.

a. El número de maneras de combinar tres colores de medias con dos colores de zapatos.

b. Formas de seleccionar un menú, teniendo cuatro opciones de ensalada, tres de carnes, cinco de jugos y dos de postre.

c. Opciones para formar parejas de baile con cinco hombres y siete mujeres.

d. Formas de mezclar tres frutas con dos tipos de líquidos distintos.

Resolución de problemas

2 En una heladería se venden conos de un sabor a elegir entre vainilla, fresa y arequipe, y se les pueden adicionar una salsa a elegir entre mora, crema de leche y leche condensada.

a. Dibuja un diagrama de árbol.

b. ¿Cuántos productos diferentes pueden escogerse en la tienda?

3) En los siguientes experimentos aleatorios, determina su espacio muestral, sus sucesos elementales y dos sucesos compuestos

a) Extraer una bola de una urna que contiene 3 bolas rojas, una bola verde y una bola azul
b) Lanzar dos dados y anotar la suma de sus puntuaciones
c) Extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5

4) Determine el suceso contrario o complementario en cada caso

En el experimento tirar un dado de parqués o parchís

a) A = “salir 1 o 2“
b) B = “No salir 5”

Al lanzar dos monedas, halla el complementario de:

a) A = “Obtener dos caras”
b) B = “Obtener al menos una cara”

5) Determine la probabilidad de los siguientes sucesos

- Halla las probabilidades que se indican en la siguiente situación.

  En un intercambio cultural participan 17 estudiantes colombianos, 8 brasileros, 4 argentinos y 2 holandeses. Entre los participantes se elige uno al azar.

  a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea colombiano?

  b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea brasilero?

- En una clase hay 16 niñas y 14 niños. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta. Luego, se introducen las tarjetas en una caja. Contesta las preguntas, considerando que se extrae una de las 30 tarjetas al azar.

  a. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de un niño?

  b. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de una niña?

- En una urna hay 30 balotas numeradas del 1 al 30. Se extrae una balota al azar. Calcula las probabilidades que se indican.

  a. Sacar un número par.

  b. Sacar un número que termina en 0.

  c. Sacar un múltiplo de 5.

  d. Sacar un número que no sea un múltiplo de 3.

4 Regla de Laplace

ANTES, DEBES SABER…

Cómo se expresa una fracción como un número decimal

Para expresar una fracción como un número decimal se divide el numerador de la fracción entre el denominador.

$\frac{3}{5} \rightarrow$ 30 | 5 ; resto 0, cociente 0,6 $\rightarrow \frac{3}{5} = 0{,}6$

$\frac{5}{12} \rightarrow$ 50 | 12 ; 20, 80, 80 … cociente 0,4166… $\rightarrow \frac{5}{12} = 0{,}41666\ldots$

Dos sucesos son **equiprobables** cuando tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio. Si todos los sucesos elementales de un experimento son equiprobables, decimos que es **regular**.

En un experimento regular, la **probabilidad** de que ocurra un suceso A, $P(A)$, se puede calcular aplicando la **regla de Laplace**.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al suceso } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

EJEMPLO

8 **En el experimento aleatorio de tirar un dado, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.**

a) «Sacar 2»   b) «Sacar número par»   c) «Sacar número menor que 4»

El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow$ Casos posibles $= 6$

Está formado por 6 resultados equiprobables: la probabilidad de obtener cada una de las caras es la misma. Podemos aplicar la regla de Laplace.

a) $A =$ «Sacar 2» $= \{2\} \rightarrow$ Casos favorables $= 1$

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{1}{6}$$

b) $B =$ «Sacar número par» $= \{2, 4, 6\} \rightarrow$ Casos favorables $= 3$

$$P(B) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) $C =$ «Sacar número menor que 4» $= \{1, 2, 3\} \rightarrow$ Casos favorables $= 3$

$$P(C) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo:

1) Para reunir fondos en un curso de educación de jóvenes y adultos deciden realizar una rifa de 20 números, cuyo premio es una canasta familiar con donaciones de los estudiantes. En una bolsa ingresan papeles numerados del 1 al 20, el o la ganadora será quien haya comprado el primer número que saquen de la bolsa. Florencia compró 3 números. Como todos los números tienen la misma probabilidad de salir primero, **¿qué probabilidad tiene de ganar?**

Probabilidad de que Florencia gane. → $P\text{ (ganar)} = \dfrac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}} = \dfrac{3}{20}$

Casos favorables: 3 números comprados por Florencia.

Casos totales: 20 números en total.

DATO IMPORTANTE

Podemos expresar la probabilidad de 3 formas:

1) Como fracción: $\dfrac{3}{20}$

2) Como decimal: Dividiendo numerador por denominador $\dfrac{3}{20} = 3 : 20 = 0{,}15$

3) Como porcentaje: Multiplicando el decimal por 100

$0{,}15 \cdot 100 = 15\%$

- **Ejemplo 2**: supongamos que se tiran 2 monedas al aire. Calcular la probabilidad de que salgan 2 caras.
  - **Todos los sucesos posibles son equiprobables**, es decir, existe la misma probabilidad de que salga cara que de que salga cruz en las dos monedas
  - Existen 4 casos posibles: {**cara-cara**, cara-cruz, cruz-cara, cruz-cruz}
  - El número de casos en los que salen 2 caras es 1 dentro de los casos posibles
  - **P(2 caras)** = nº casos en los que salen 2 caras / nº casos posibles = **1/4** = **0,25**

1. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro perfecto, con las caras numeradas del 1 al 12. Calcular:

a) $P[8]$

b) P**[menor que 3]**

c) P**[impar]**

d) P**[número primo]**

e) P**[mayor que 4 pero menor que 8]**

1. a) $P[8] = \dfrac{1}{12}$. Hay 12 casos, y el "8" es uno de ellos.

b) Solo 1 y 2 son menores que 3 → $P[\text{menor que } 3] = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

c) Hay 6 números impares menores que 12 → $P[\text{impar}] = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

d) 2, 3, 5, 7, 11 son primos → $P[\text{número primo}] = \dfrac{5}{12}$

e) $P[\{5, 6, 7\}] = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

6 Propiedades de la probabilidad

1.ª Para cualquier suceso A se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$.

2.ª La probabilidad de un suceso seguro es 1 y la probabilidad de un suceso imposible es 0.

$$P(E) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$$

5.ª Si A y $\overline{A}$ son sucesos contrarios:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

ANTES, DEBES SABER...

Cómo se resta a un número natural una fracción

Se multiplica el denominador de la fracción por el número natural, y se le resta el numerador.

$$1 - \frac{5}{6} \underset{\uparrow}{=} \frac{6 \cdot 1 - 5}{6} = \frac{1}{6}$$

m.c.m. $(1, 6) = 6$

EJEMPLO

10 Lanzamos un dado y observamos la puntuación que sale. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Obtener un número menor o igual que 6.

b) Obtener un número mayor que 9.

c) Obtener un número mayor que 5.

d) Obtener un número menor o igual que 5.

Como hay las mismas posibilidades de que salga cualquier número, podemos aplicar la regla de Laplace.

a) A = «Obtener un número menor o igual que 6» = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$

$$P(E) = 1$$

b) B = «Obtener un número mayor que 9» = $\varnothing$

$$P(\varnothing) = 0$$

c) C = «Obtener un número mayor que 5» = $\{6\}$

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

d) D = «Obtener un número menor o igual que 5» = $\overline{C}$

$$P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

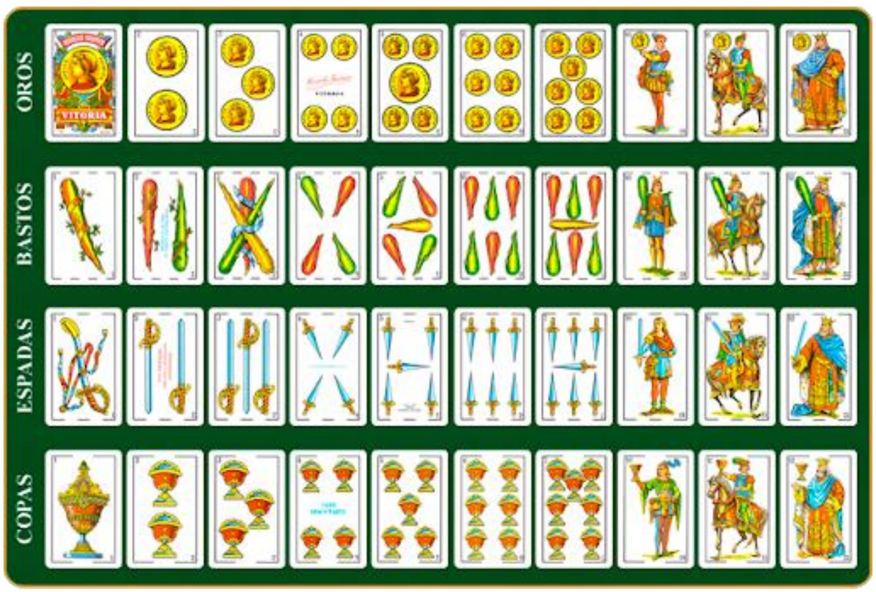
Para poder resolver algunos de los ejercicios propuestos debes tener en cuenta lo siguiente. (No sigas adelante sin antes leer y analizar)

PARTICULARIDADES DE LA BARAJA ESPAÑOLA

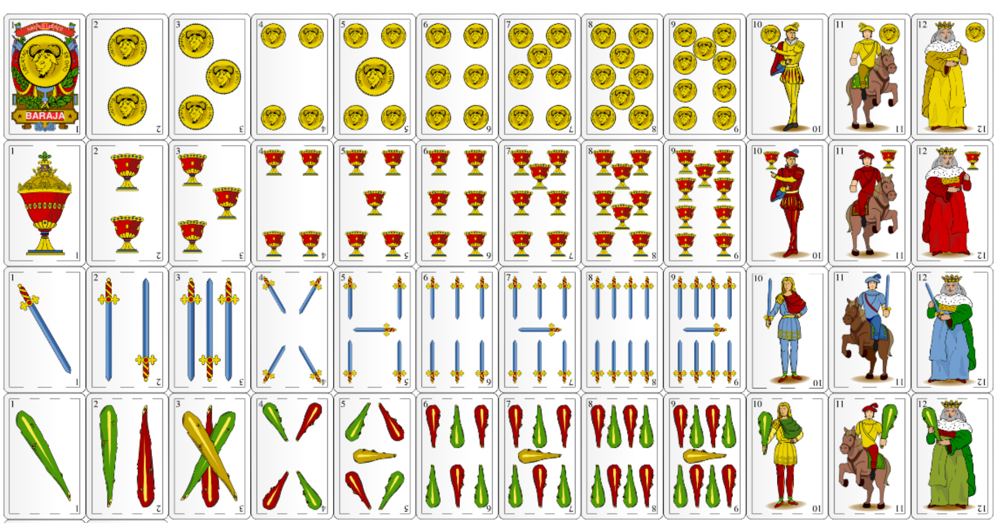
La **baraja española** se distingue por sus **diseños inspirados en la época medieval**, de esta manera, se divide en **cuatro grupos** que corresponden a las **jerarquías existentes** en ese tiempo, en este sentido, *los comerciantes representan al* **oro***, el clero simboliza a las* **copas***, la nobleza alude a las* **espadas** *y los* **bastos** *equivalen a los siervos.*

Teniendo un **total de 48 cartas**, cada clase o *palo* contiene **12 naipes, enumerados del 1 al 9**, donde la primera carta es llamada *as*, y las tres restantes contienen una figura de cuerpo entero, que representa a los números 10, 11 y 12, es decir, la *sota*, el *caballo* y el *rey*, respectivamente.

Por otra parte, existe una **versión de 40 naipes**, con los mismos tipos de *palos*, pero **enumerados del 1 al 7**, adicionalmente, incluye tres cartas con la imagen del *caballo*, la *reina* y el *rey* por cada grupo, simbolizando los números 10, 11 y 12, correspondientemente.



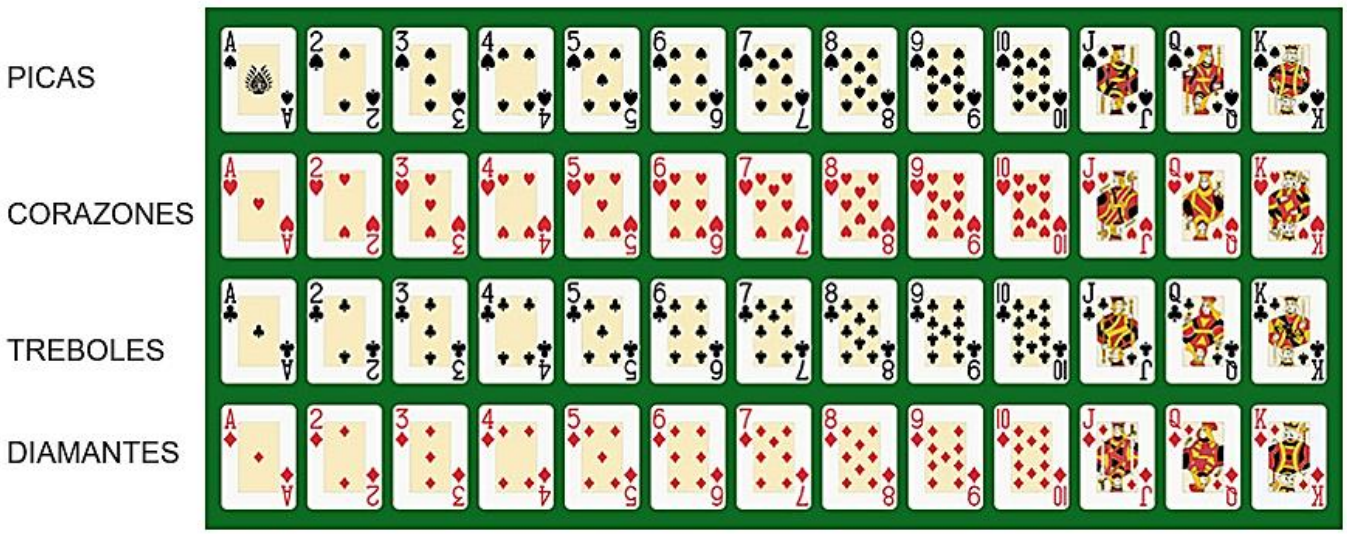
40 CARTAS



48 CARTAS

PARTICULARIDADES DE LA BARAJA FRANCESA

Se trata de un recurso formado por 52 cartas divididas en 4 palos; 2 de color negro y 2 de color rojo. Los palos son: corazones, diamantes, tréboles y picas. Cada palo está formado por 13 cartas, de las cuales 9 van enumeradas y 4 designadas con letras. Su orden va de menor a mayor rango: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A



Las pintas rojas son los corazones y los diamantes
Las pintas negras son las picas y los tréboles

ESPACIO MUESTRAL DEL LANZAMIENTO DE DOS DADOS A LA VEZ

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

EJEMPLOS PARA TENER EN CUENTA

La baraja francesa tiene 13 cartas de cada palo: corazones, rombos (o diamantes), tréboles y picas. Si mezclamos bien la baraja y sacamos una carta al azar, calcula la probabilidad de que la carta sea:

- a) una carta de corazones
- b) un as
- c) una carta roja
- d) un as rojo

SOLUCIÓN

- a) una carta de corazones

La baraja francesa tiene 52 cartas. Hay 13 cartas de corazones.

P (carta corazones) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

- b) un as

En las 52 cartas hay cuatro ases

P (as) = $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

- c) una carta roja

Los corazones (13 cartas) y los diamantes (13 cartas) son rojos

P (roja) = $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

- d) un as rojo

Hay dos ases rojos: el as de corazones y el as de diamantes

P (as rojo) = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

En el experimento aleatorio "lanzar dos dados" consideramos los siguientes sucesos:

- A = "La suma de puntos obtenidos es 5"
- B = "Igual resultado en ambos dados"

Para que la suma de puntos sea 5 tenemos estos casos:
(1-4) (2-3) (3-2) (4-1)

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Igual resultado en ambos dados:
(1-1)(2-2)(3-3)(4-4)(5-5)(6-6)

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Actividad para entregar #3

FECHA DE ENTREGA:

Recuerde que debe entregar las actividades que se le vayan asignando en esta guía con sus respectivas sustentaciones

1) De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Calcula las probabilidades de estos sucesos.

a) A = «Obtener oros»
b) B = «Obtener el rey de oros»
c) C = «Obtener espadas o copas»

2) Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Obtén la probabilidad de que la suma:

a) Sea 3.
b) No sea 7.
c) Sea inferior a 11.
d) Sea mayor que 7

3) Si tengo una bolsa llena de lapiceros de tinta negra y azul, de los cuales 40 son de tinta negra y 10 de tinta azul, y sin mirar dentro de la bolsa saco uno de ellos. ¿Un lapicero de qué color es más probable que saque? ¿Por qué?

4) En una bolsa hay 5 bolas rojas, 10 verdes y 5 azules. Se extrae una bola. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos. a) Sacar una bola roja. b) Sacar una bola verde. c) Sacar una bola que no sea azul.

5) En la tabla se presentan las cartas que conforman una baraja de póker

	NEGRAS		ROJAS	
	Picas	Tréboles	Corazones	Diamantes
1	♠A	♣A	♥ A	♦ A
2	♠2	♣2	♥ 2	♦ 2
3	♠3	♣3	♥ 3	♦ 3
4	♠4	♣4	♥ 4	♦ 4
5	♠5	♣5	♥ 5	♦ 5
6	♠6	♣6	♥ 6	♦ 6
7	♠7	♣7	♥ 7	♦ 7
8	♠8	♣8	♥ 8	♦ 8
9	♠9	♣9	♥ 9	♦ 9
10	♠10	♣10	♥ 10	♦ 10
11	♠J	♣J	♥ J	♦ J
12	♠Q	♣Q	♥ Q	♦ Q
13	♠K	♣K	♥ K	♦ K

Tabla

Si la probabilidad de escoger una de ellas que cumpla dos características determinadas es cero, estas características podrían ser:

A. Ser una carta negra y ser un número par.
B. Ser una carta roja y ser de picas.
C. Ser una carta de corazones y ser un número impar.
D. Ser la carta roja K y ser de diamantes.

6) Lanzamos al aire una moneda tres veces. Determina el espacio muestral y los elementos que conforman los sucesos A: obtener dos sellos y una cara y B: Obtener tres caras

RESPONDA LAS PREGUNTAS 7 A 9 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Ricardo lanza simultáneamente al aire dos dados. **(recuerde sustentar sus respuestas)**

7) La probabilidad de que la suma sea múltiplo de 4 es:

A. $\frac{9}{10}$

B. $\frac{9}{12}$

C. $\frac{9}{36}$

D. $\frac{11}{36}$

8) La probabilidad de que la suma sea mayor que 8 es:

A. $\frac{7}{36}$

B. $\frac{10}{36}$

C. $\frac{9}{12}$

D. $\frac{11}{36}$

9) La probabilidad de que la suma sea igual a 7 es:

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{6}{12}$

D. $\frac{12}{36}$

RESPONDA LAS PREGUNTAS 10 Y 11 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN (recuerde sustentar sus respuestas)

Yuly, Constanza, Andrea y Nidia son cuatro hermanas que decidieron rifar entre ellas una muñeca que les regalaron, para ello utilizan dos dados que serán lanzados hasta que la suma de los puntos obtenidos en cada lanzamiento coincida con los números que eligió cada una. Los números elegidos fueron los siguientes:

Yuly: 2 y 4
Constanza: 3 y 12
Andrea: 6 y 8
Nidia: 5 y 10

10) La niña que tiene la mayor probabilidad de ganar la muñeca es:

A. Yuly
B. Constanza
C. Andrea
D. Nidia

11) De acuerdo con la posibilidad que ofrecen los dados para obtener cada número elegido, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A. la probabilidad de obtener el número 2 es mayor que la probabilidad de obtener el 10
B. el número que tiene la mayor probabilidad de obtenerse es el 3
C. la probabilidad de obtener el número 5 es igual a la probabilidad de obtener el 10
D. el número que tiene la menor probabilidad de obtenerse es el 2

12) Al sacar una carta de un mazo bien barajado de 52 cartas. Cuál es la probabilidad de sacar:

a) Un as, un trébol o un 7
b) Una reina o un 3

13) En una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Calcula la probabilidad de que:
a) Sea de oros.
b) Sea el rey de copas.
c) Sea un rey.
d) No sea el as de espadas.
e) Sea de copas.
f) Sea de bastos.
g) Sea de copas o de bastos.
h) No sea un as.
i) Sea una figura.
j) No sea una figura.

14) Recuerde sustentar sus respuestas

Se escriben todas las letras de la palabra *murciélago* en tarjetas y se introducen en una urna. Determina si las afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V).

VERDADERO/FALSO

a. La cantidad de eventos favorables para el evento *vocal a* es 1. ( )
b. La probabilidad de sacar una vocal es igual a la de sacar una consonante. ( )
c. La probabilidad de sacar una vocal es 0,1. ( )
d. Es imposible obtener una letra b. ( )
e. Es seguro obtener una consonante. ( )

Bibliografía

Matemáticas 3 ESO Proyecto los caminos del saber Santillana

Vamos a aprender 9 libro del Ministerio de Educación Nacional Republica de Colombia

Se deja abierta la propuesta de fortalecer de manera opcional pensando en las pruebas saber la definición de Cónicas sus gráficas, representación algebraica y diferentes características.

Link de video tutorial a tener en cuenta: https://www.youtube.com/watch?v=1tDPawAoiC0